1 Herleitung der elektromagnetischen Wellengleichung[1]

Die zur Wellenausbreitung gehörigen mathematischen Beziehungen lassen sich auf Basis der maxwellschen Gleichungen nachvollziehen. Insbesondere lässt sich dieselbe Wellengleichung herleiten, mit der sich auch Schallwellen ausbreiten, obwohl dort völlig andere, rein mechanische Grundlagen maßgebend sind.

Eine elektromagnetische Welle breite sich im Vakuum aus, und zwar im ladungsfreien Raum unter Ausschluss von dielektrischen, dia- und paramagnetischen Effekten ($\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, siehe Materialgleichungen der Elektrodynamik). Die Stromdichte $\vec{j}$ und Ladungsdichte ϱ betragen null.

Ausgehend von der dritten maxwellschen Gleichung

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$

wendet man auf beide Seiten den Rotationsoperator an. Dadurch erhält man:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{H}\right). \tag{2}$$

Setzt man darin die vierte maxwellsche Gleichung (mit $\vec{j} = 0$) ein,

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}, \tag{3}$$

ergibt sich

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{4}$$

Dazu gilt ganz allgemein die vektoranalytische Beziehung

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \tag{5}$$

mit dem Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{6}$$

Wendet man diese Beziehung auf $\vec{E}$ an und berücksichtigt, dass der ladungsfreie Raum betrachtet wird, in dem nach der ersten Maxwellschen Gleichung die Divergenz von $\vec{D}$ null beträgt, so folgt:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}. \tag{7}$$

Setzt man nun (4) und (7) zusammen, ergibt sich folgende Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \tag{8}$$

[1] Text aus `http://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetische_Welle`